はじめに

この問題集は、公立校難関・上位校合格のために必要な実戦力を身につけるためのものです。
公立高校入試問題では、満点を取りにくくするためのいわゆる「応用問題」が出題されます。特に学校別独自入試問題は基礎力だけでは太刀打ちできません。しかしその応用問題もパターンがあるので、パターンをおさえれば必ず解けるようになります。
本書は公立高校入試で実際に出た問題で構成されており、頻出パターンを数多くそろえました。本番での実戦力が確実に身につきます。

目 次

3 数の性質に関する問題

Mさんが，自由研究で自然数の性質について図書館で調べたところ，本の中に，次のような操作で，自然数がどのように変わっていくかが書かれていた。

【本の内容】

操作

ある自然数aが

① 偶数ならaを2で割る。

② 奇数ならaを3倍して1を加える。

自然数aに操作を行い，得られた数をbとし，bに対して操作を行ってcを得ることを自然数aに2回の操作を行うとし，3回，4回，5回，…の操作は同様とする。

例えば，7に3回の操作を行うと　$7 \to 22 \to 11 \to 34$　となる。

自然数aが10000以下のとき，自然数aに操作を繰り返し行うと必ず1になることは分かっている。

Mさんは自然数aが初めて1になるまでの操作の回数に興味を持った。そこで，自然数aに操作を繰り返し行い，初めて1になるまでの操作の回数を$\mathrm{N}(a)$とし，$\mathrm{N}(1)=0$とした。

例えば，10に操作を繰り返し行うと，6回の操作で初めて1になるので，$\mathrm{N}(10)=6$である。次の各問に答えよ。（東京・西）

〔問１〕 $\mathrm{N}(6)$を求めよ。

〔問２〕 $\mathrm{N}(168)-\mathrm{N}(8\times d)=3$を満たす自然数$d$を求めよ。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

Mさんは，操作の回数だけでなく，1になるまでの自然数の変化にも着目してみた。下の表は2020に操作を繰り返し行い，2020が1になるまでに現れたすべての自然数を2020も含めて左から小さい順に並べたとき，最初からx番目の自然数をyとして，xとyの関係を表したものである。ただし，e，f，gにはそれぞれある自然数があてはまり，表の中の…の部分は自然数が省略されている。

x	1	2	3	4	…	$e-2$	$e-1$	e	$e+1$	…	$\mathrm{N}(2020)$	$\mathrm{N}(2020)+1$
y	1	2	4	5	…	172	f	g	344	…	2020	2752

表のyの値の中央値は233.5で，fは2020から37回操作を行ったときに現れる自然数で，2020から38回操作を行ったときに現れる自然数は98であり，$\mathrm{N}(2020)=53+\mathrm{N}(160)$が成り立つ。

〔問３〕 このとき自然数の組$(e,\ g)$を求めよ。

解答・解説

［問１］ $6\to3(=6\div2)\to10(=3\times3+1)$　より，$\mathrm{N}(6)=2+\mathrm{N}(10)=2+6=$**8**

［問２］（途中の式や計算）（例）$8=2^3=2\times2\times2$で　$2\times2\times2\to2\times2\to2\to1$　なので，$\mathrm{N}(8)=\mathrm{N}(2^3)=3$…①となる。また　$8\times d\to4\times d\to2\times d\to d\to\cdots\to1$　なので　$\mathrm{N}(8\times d)=\mathrm{N}(8)+\mathrm{N}(d)$…②となる。①②より　$\mathrm{N}(8\times d)=3+\mathrm{N}(d)$　①②と同様にして，$\mathrm{N}(168)=\mathrm{N}(2^3\times21)=\mathrm{N}(2^3)+\mathrm{N}(21)=3+\mathrm{N}(21)$　ここで，$21\to64\to\cdots1$　となるので　$\mathrm{N}(21)=1+\mathrm{N}(64)=1+\mathrm{N}(2^6)$　ここで①と同様にして，$\mathrm{N}(2^6)=6$　となる。したがって，$\mathrm{N}(21)=1+6=7$　ゆえに，$\mathrm{N}(168)=3+7=10$　したがって，$\mathrm{N}(168)-\mathrm{N}(8\times d)=3$　は　$10-(3+\mathrm{N}(d))=3$　となるので，$\mathrm{N}(d)=4$…③　ここで自然数の変化を1から逆にたどっていくと，$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow8\leftarrow16$　または　$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow1\leftarrow2$　となり，初めて1になるまでの操作の回数を$\mathrm{N}(a)$としたので，③を満たす自然数dは1個しかなく，$\boldsymbol{d=16}$である。

［問３］ 2020から37回操作を行ったときに現れる自然数がfで，2020から38回操作を行ったときに現れる自然数が98だから，自然数の変化を98から逆にたどると，$98\leftarrow196$となり，$f=196$である。［問２］の内容より，$\mathrm{N}(160)=\mathrm{N}(8\times20)=3+\mathrm{N}(20)$　ここで，$20\to10(=20\div2)$より，$\mathrm{N}(20)=1+\mathrm{N}(10)=1+6=7$　となるので　$\mathrm{N}(160)=3+\mathrm{N}(20)=3+7=10$　ゆえに，$\mathrm{N}(2020)=53+\mathrm{N}(160)=53+10=63$　$\mathrm{N}(2020)+1=63+1=64$　である。よって，問題の表のyの値の中央値は，$x=32$と$x=33$のときのyの値の平均値である。$e-2=32$とすると，中央値$=\dfrac{172+f}{2}=\dfrac{172+196}{2}=184$となり，問題の条件に合わない。$e=32$とすると，中央値$=\dfrac{g+344}{2}=233.5$より，$g=123$となり，$f>g$で，問題の条件に合わない。以上より，$e-1=32$　つまり，$\boldsymbol{e=32+1=33}$であり，gの値は，中央値$=\dfrac{f+g}{2}=\dfrac{196+g}{2}=233.5$より，$\boldsymbol{g=271}$である。

さらに詳しい解説は ▶▶▶ イカの巻（まき） 2 で解き方を確認！