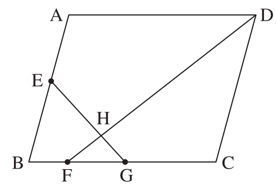
＋α 数学 東京学芸大学附属高等学校 2021年度

平行な直線に他の直線がまじわるとき，同位角や錯角が等しくなる。そのことから，相似な三角形ができやすく，また，相似な三角形の辺の比を利用して，線分の比を簡単に使うこともできる。次の問題に取り組みながら，線分の比や面積の比について研究してみよう。

〈問題〉

平行四辺形ABCDにおいて，辺AB上に点Eを，辺BC上に点F，Gを，AE：BE＝2：3，BF：FG：GC＝1：2：3となるようにとる。線分EG，DFを引き，その交点をHとするとき，次の各問いに答えなさい。

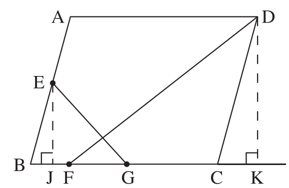


(1)　△BEGと△CDFの面積の比を求めなさい。

(2)　EH：GHを求めなさい。

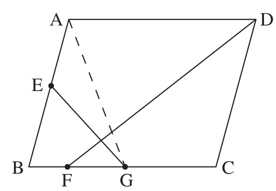
〈解説〉

(1)　点E，Dから直線BCに垂線EJ，DKを引く。△EBJと△DCKにおいて，AB//DCなので同位角は等しく，∠EBJ＝∠DCK　2組の角がそれぞれ等しいから，△EBJ∽△DCK よって，EJ：DK＝EB：DC＝3：5　EJ＝3hとすると，DK＝5h　BF＝aとすると，FG＝2a，GC＝3aだから，BG＝3a，FC＝5a　よって，△BEG＝$\frac{1}{2}$×BG×EJ＝$\frac{1}{2}$×3a×3h＝$\frac{9}{2}ah$，△CDF＝$\frac{1}{2}$×FC×DK＝$\frac{1}{2}$×5a×5h＝$\frac{25}{2}ah$　よって，△BEG：△CDF＝3ah：$\frac{25}{2}ah$＝9：25

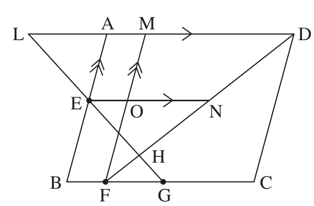


この問題を「高さが等しい三角形の面積の比は底辺の比に等しい」ことを用いてやってみよう。

BE：BA＝3：5だから，△BEG：BAG＝3：5　よって，△BEG＝$\frac{3}{5}$△BAG…①　BG：FC＝3：5だから，△BAG：△CDF＝3：5　△BAG＝$\frac{3}{5}$△CDF…②　②を①に代入すると，△BEG＝$\frac{3}{5}$×$\frac{3}{5}$△CDF＝$\frac{9}{25}$△CDF　よって，△BEG：△CDF＝9：25



(2)　右図のように，直線GEと直線DAの交点をLとすると，LE：GL＝AE：BE＝2：3　BG＝3aとしたとき，AL＝2a　LH：GH＝LD：GF＝8：2＝4：1　LH＝$\frac{4}{5}$LG　GH＝$\frac{1}{5}$LG　LE：GE＝AE：BE＝2：3　LE＝$\frac{2}{5}$LG　よって，EH：GH＝(LH－LE)：GH＝$\left(\frac{4}{5}\text{LG}-\frac{2}{5}\text{LG}\right)$：$\frac{1}{5}$LG＝2：1



図で，EN//AD，MF//AB　これを使うと，NO＝$\frac{3}{5}$DM＝3a　EN＝a＋3a＝4a　EH：GH＝EN：GF＝4a：2a＝2：1と簡単に求められる。いろいろとやってみよう。