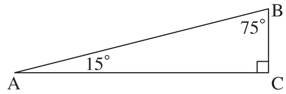
＋α　数学　早稲田実業学校高等部　2020年度

$\boxed{5}$で，内角の大きさが15°，75°，90°の直角三角形が登場する。本問題では，その1辺が円の半径になる問題の一部として登場したので，(長さ)^{2}を求めるだけでよかったが，長さを求めることになったらどうしたらよいだろう。

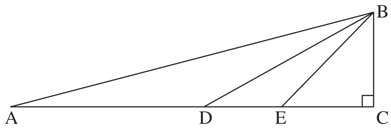
(問題)　$\angle A=15^\circ$，$\angle B=75^\circ$，$\angle C=90^\circ$の直角三角形ABCで，最も短い辺BCを1としたとき，AC，ABの長さを求めよ。



(解法)　AC上に$\angle BDC=30^\circ$となる点Dをとると，$\triangle DBC$は内角の大きさが30°，60°，90°の直角三角形となるので，$CD=\sqrt{3}$，$BD=2$　　$\angle BDC$は$\triangle ADB$の外角だから，$\angle DBA=\angle BDC-\angle BAD=15^\circ$　　よって，$\triangle ADB$は2角が等しいので二等辺三角形である。よって，$AD=BD=2$　　したがって，$AC=2+\sqrt{3}$

ABの長さを求めるには様々な方法がある。

(解法1)　AC上に$\angle BDC=30^\circ$となる点Dと，$\angle EBC=45^\circ$となる点Eをとると，$CD=\sqrt{3}$，$CE=1$なので，$DE=\sqrt{3}-1$　　また，$AD=2$，$BE=\sqrt{2}$



$\angle DBE=\angle DBA=15^\circ$となるからBDは$\angle ABE$の二等分線である。三角形の角の二等分線は，その角と向かうあう辺を，角を作る2辺の比に分けるから，$AD:DE=BA:BE$

$AB=x$とすると，$2:(\sqrt{3}-1)=x:\sqrt{2}$　　$(\sqrt{3}-1)x=2\sqrt{2}$　　$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(解法2)　まずは次の計算や因数分解に慣れておこう。

① $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$を計算しなさい。　② $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$を計算しなさい。

③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$を計算しなさい。　③ $(\sqrt{2a}+\sqrt{6a})^2$を計算しなさい。

⑤ $8+2\sqrt{15}$を$(a+b)^2$の形で表しなさい。　⑥ $9+6\sqrt{2}$を$(a+b)^2$の形で表しなさい。

①… $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$　　②… $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{12}+2=8+4\sqrt{3}$

③… $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b=a+b+2\sqrt{ab}$

④ $(\sqrt{2a}+\sqrt{6a})^2=2a+2\sqrt{12a^2}+6a=8a+4\sqrt{3}a$

⑤ $8+2\sqrt{15}=5+3+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

⑥ $9+6\sqrt{2}=9+2\times3\times\sqrt{2}=9+2\sqrt{18}=6+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}+3=(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$

この計算や因数分解が身につけば，$AB^2=AC^2+BC^2$を用いることができる。

$AB^2=(2+\sqrt{3})^2+1^2=4+4\sqrt{3}+3+1=8+2\sqrt{12}=6+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2=(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$　　よって，$AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$