

〈約数の和〉

本年度は②の大問で正の整数の約数の個数が登場した。それでは、正の整数の約数の総和についてはどう考えていけばよいのだろうか。

- (1) 12の約数をすべて書き出し、それらの約数を加えるといくつになるかを求めなさい。
- (2) 72を素因数分解すると、 $2^3 \times 3^2$ となる。よって、約数の個数は次の式で求めることができる□を正しく埋めて式を完成しなさい。

$$(3+\square) \times (2+\square) = \square$$

- (3) 72の約数を小さいものから順に累乗の指数を用いて書き出すと次のようになる。空欄を正しく埋めなさい。
- 1, 2, 3, 2^2 , 2×3 , (ア), (イ), (ウ), (エ), $2^3 \times 3$, (オ), $2^3 \times 3^2$
- (4) 次の枠の中の説明文は、72の約数を全部加えるといくつになるかを、含まれる素因数に着目して求める方法を示したものである。空欄を正しく埋めなさい。

$$\begin{aligned} & 1+2+2^2+2^3+1 \times 3+2 \times 3+2^2 \times 3+2^3 \times 3+1 \times 3^2+2 \times 3^2+2^2 \times 3^2+2^3 \times 3^2 \\ & = (1+2+2^2+2^3) + (\text{ア}) \times 3 + (\text{イ}) \times 3^2 \\ & 1+2+2^2+2^3 = A \text{ とおくと,} \\ & (\text{ア}) \times 3 + (\text{イ}) \times 3^2 = A + (\text{ウ}) + (\text{エ}) = \\ & A(\text{オ}) \quad A \text{ を元に戻すと, } (1+2+2^2+2^3) \times (\text{オ}) \text{ となる。} \end{aligned}$$

- (5) $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ である。600の約数の総和を求めなさい。

〈解答〉

- (1) $1+2+3+4+6+12=28$ 〈(4)の方法を使うと、 $(1+2+2^2) \times (1+3) = 28$ 〉
- (2) ア…1 イ…1 ウ…12
- (3) ア… 2^3 イ… 3^2 ウ… $2^2 \times 3$ エ… 2×3^2 オ… $2^2 \times 3^2$
- (4) ア… $1+2+2^2+2^3$ イ… $1+2+2^2+2^3$ ウ… $3A$ エ… 3^2A オ… $1+3+3^2$
- (5) $(1+2+2^2+2^3) \times (1+3) \times (1+5+5^2) = 15 \times 4 \times 24 = 1440$

〈正の整数の約数の逆数の総和について〉

◎12の約数は1, 2, 3, 4, 6, 12である。この和は $12 = 2^2 \times 3$ だから、 $(1+2+2^2) \times (1+3) = 28$ である。では、これらの約数の逆数の総和はどうやって求めたらよいだろうか。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{12+6+4+3+2+1}{12}$$

つまり、 $\frac{(12 \text{ の約数の総和})}{12}$ となる。 $\frac{(1+2+2^2) \times (1+3)}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

○600の約数の逆数の総和を求めると、 $\frac{(1+2+2^2+2^3) \times (1+3) \times (1+5+5^2)}{600} =$

$$\frac{1440}{600} = \frac{144}{60} = \frac{12}{5}$$