2019年度

解　答　と　解　説

《2019年度の配点は解答欄に掲載してあります。》

＜数学解答＞ 《学校からの正答の発表はありません。》

$\boxed{1}$ (1) $a=\dfrac{1}{8}$　(2) 1：49

$\boxed{2}$ (1) $0<x\leqq 3$のとき$S=4\sqrt{3}x$　$7\leqq x<10$のとき$S=40\sqrt{3}-4\sqrt{3}x$　(2) $x=5\pm\sqrt{2}$

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{33}{200}$　(2) (ⅰ) $\dfrac{61}{125}$　(ⅱ) $\dfrac{91}{125}$

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{8}{5}$　(2) $\dfrac{9}{2}$　(3) $\dfrac{129}{10}$

○推定配点○

$\boxed{1}$ (1) 8点　(2) 12点　$\boxed{2}$ (1) 10点　(2) 10点

$\boxed{3}$ (1) 6点　(2) 各12点×2

$\boxed{4}$ (1) 8点　(2) 10点　(3) 12点　計100点

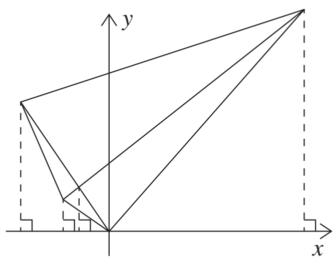
＜数学解説＞

$\boxed{1}$ （関数・グラフと図形の融合問題－直線の交点，面積の比）

(1) 4点O，A，B，Cは関数$y=ax^2$のグラフ上の点なので，それぞれの座標はaを用いて，O(0, 0)，A(－4, 16a)，B(16, 256a)，C(－12, 144a)と表せる。よって，直線CAの傾きは，$\dfrac{16a-144a}{-4-(-12)}=-16a$，直線CBの傾きは，$\dfrac{256a-144a}{16-(-12)}=4a$と表せる。∠ACB＝90°のとき，直線CAと直線CBは垂直に交わるから，その傾きの積は－1である。したがって，$-16a\times 4a=-1$

$a^2=\dfrac{1}{64}$　aは正の数なので，$a=\dfrac{1}{8}$

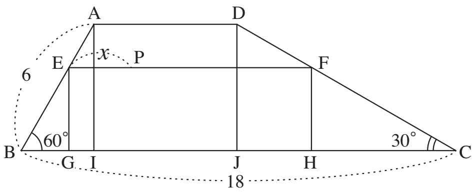
やや難 (2) $a=\dfrac{1}{8}$だから，A(－4, 2)，B(16, 32)，C(－12, 18)　直線OCは傾きが$\dfrac{18}{-12}=-\dfrac{3}{2}$，切片が0なので，直線OCの式は$y=-\dfrac{3}{2}x$　直線ABは傾きが$\dfrac{32-2}{16-(-4)}=\dfrac{3}{2}$だから，直線ABの式を$y=\dfrac{3}{2}x+b$とおいてA(－4, 2)を代入すると，$b=8$　よって，直線ABの式は$y=\dfrac{3}{2}x+8$である。したがって，点Pのx座標は方程式$-\dfrac{3}{2}x=\dfrac{3}{2}x+8$の解として求められるから，$x=-\dfrac{8}{3}$　同じ直線上の線分の比は，線分の両端のx座標の差の比として求められるので，AP：PB＝$\left\{-\dfrac{8}{3}-(-4)\right\}:\left\{16-\left(-\dfrac{8}{3}\right)\right\}$＝1：14　OP：PC＝$\left\{0-\left(-\dfrac{8}{3}\right)\right\}:\left\{-\dfrac{8}{3}-(-12)\right\}$＝2：7



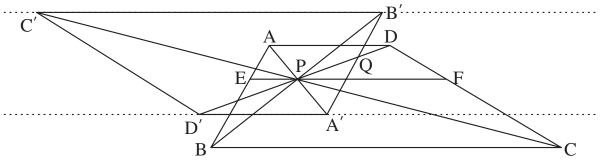
高さが共通な三角形の面積の比は底辺の比に等しいので，△OPAの面積をSとすると，△OPB＝14S　△BPC：△OPB＝7：2だから，△BPC＝49S　したがって，△OPA：△BPC＝

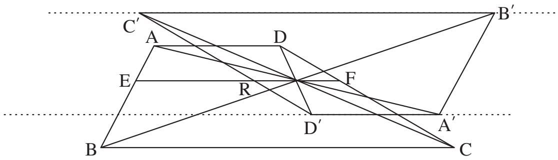
1：49

2 （平面図形－点対称移動，重なる部分，面積，三平方の定理）

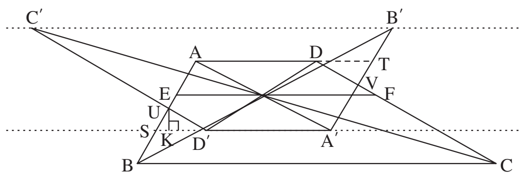


（1）　図1のように点E，F，A，DからBCに垂線EG，FH，AI，DJを引き，内角の大きさが30°，60°，90°の直角三角形の3辺の比が$2:1:\sqrt{3}$となることを用いると，BG＝2，BI＝3　FH＝EG＝$2\sqrt{3}$だから，CH＝6，DJ＝AI＝$3\sqrt{3}$だから，CJ＝9　よって，EF＝10，AD＝6である。





A′B′とEFが交わる点をQとすると，点PはAA′の中点なので，点PはEQの中点である。まず，A′B′が線分ADと交わるときに重なる部分が平行四辺形になる。よって，$0<x\leqq 3$のときである。そのときの重なってできる平行四辺形の底辺は$2x$であり，高さは，$2\sqrt{3}$だから，$S=2x\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}x$　次に重なる部分が平行四辺形になるのは，C′D′が線分ADと交わるときである。C′D′がEFと交わる点をRとすると点PはRFの中点であり，PF≦3のとき，つまり，$7\leqq x<10$のときに重なる部分が平行四辺形となる。EP＝xのときPF＝$10-x$　そのときの重なってできる平行四辺形の底辺は$2(10-x)$であり，高さは，$2\sqrt{3}$だから，$S=2(10-x)\times 2\sqrt{3}=40\sqrt{3}-4\sqrt{3}x$



（2）　$0<x\leqq 3$のときと$7\leqq x<10$のときにできる平行四辺形について，面積Sが最大となるのは$6\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$である。よって，$S=14\sqrt{3}$となるのは$3<x<7$のときであり，重なる部分は右図のような六角形AUD′A′VDとなる。その面積は，（平行四辺形ASA′T）－△USD′－△VTDで求めることができる。なお，この図形は点Pについて対称なので，△USD′＝△VTDである。EP＝xとするとき，EP：SA′＝AE：AS＝1：2だから，SA′＝$2x$　SD′＝$2x-6$　点UからAD′に垂線UKを引くと，△UD′S，△USKは内角の大きさが30°，60°，90°の直角三角形だから，$UK=\frac{\sqrt{3}}{2}US=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}SD'=\frac{\sqrt{3}}{4}SD'$となる。よって，$\triangle USD'=\frac{1}{2}\times(2x-6)\times\frac{\sqrt{3}}{4}(2x-6)=\frac{\sqrt{3}}{8}(2x-6)^2=\frac{\sqrt{3}}{8}(4x^2-24x+36)$　平行四辺形ASA′Tの面積は$2x\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}x$　したがって，$S=14\sqrt{3}$となるとき，$4\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{8}(4x^2-24x+36)\times 2=14\sqrt{3}$　$-\sqrt{3}x^2+10\sqrt{3}x-23\sqrt{3}=0$　$x^2-10x+23=0$　二次方程式の解の公式を用いると，$x=\frac{10\pm\sqrt{100-92}}{2}=\frac{10\pm 2\sqrt{2}}{2}=5\pm\sqrt{2}$

3 （確率－正二十面体のさいころ，数の性質）

重要　（1）　2回投げたときの出た面の数の和は2から40までの自然数である。そのうち，6の倍数は6，12，18，24，30，36　和が6となる場合の面の出方は，（1，5），（2，4），・・，（5，1）の5通り…①　和が12となる場合は，（1，11），（2，10），・・，（11，1）の11通り…②　和が18となる場合は，（1，

17)，(2，16)，‥，(17，1)の17通り…③　和が24となる場合は，(4，20)，(5，19)，‥，(20，4)の17通り…④　和が30となる場合は，(10，20)，(11，19)，・・，(20，10)の11通り…⑤　和が36となる場合は，(16，20)，(17，19)，・・，(20，16)の5通り…⑥　①～⑥から，和が6の倍数となる場合が66通りあり，2回投げたときの目の出方も総数は$20^2=400$なので，その確率は，$\frac{66}{400}=\frac{33}{200}$

やや難　(2)　(ⅰ)　出た面の数を5で割った余りは，0，1，2，3，4のいずれかである。3数a，b，cの積が0となるのは，a，b，cのうち少なくとも1個が0のときである。5で割った余りが0となる面の数は5，10，15，20の4個であり，a，b，cのいずれもが0でない場合の数は，$16\times16\times16$(通り)として求められる。3回投げたときの目の出方の総数は$20\times20\times20$だから，3数の積abcが0とならない確率は，$\frac{16\times16\times16}{20\times20\times20}=\frac{64}{125}$　したがって，3数の積abcが0となる確率は，$1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$

(ⅱ)　$\frac{abc}{6}$が整数となるのは，abcが6の倍数となるときである。0も6の倍数であり，(ⅰ)で確かめたように$abc=0$となる場合は61通りある。…①　a，b，cのいずれもが0でない場合は$4\times4\times4=64$(通り)ある。そのうちのa，b，cがすべて異なる数の場合には，$1\times2\times3$，$2\times3\times4$，$1\times3\times4$の3パターンがあり，それぞれにa，b，cのどれがどの数になるかについて，例えば$1\times2\times3$の場合の$(a，b，c)=(1，2，3)$，(1，3，2)，(2，1，3)，(2，3，1)，(3，1，2)，(3，2，1)のように6通りずつあるから，$3\times6=18$(通り)…②　a，b，cのうち2つが同じ数の場合には，$2\times2\times3$，$2\times3\times3$，$3\times3\times4$，$3\times4\times4$の4パターンあり，それぞれにa，b，cのどれがどの数になるかについて，例えば$2\times2\times3$の場合の$(a，b，c)=(2，2，3)$，(2，3，2)，(3，2，2)のように3通りずつあるから，$4\times3=12$(通り)…③　①～③から，$61+18+12=91$(通り)あるので，$\frac{abc}{6}$が整数となる確率は，$\frac{91}{125}$

4　(空間図形－切断，面積，体積)

(1)　図1のように，点KからEFに平行な直線を引いて，JHとの交点をPとすると，KP：EJ＝HK：HE＝1：3　EJ＝4なので，$KP=\frac{4}{3}$　また，$KN:FN=KP:FJ=\frac{4}{3}:2=2:3$　よって，KN：KF＝2：5　△JNKと△JFKはそれぞれの底辺をKN，KFとみたときの高さが共通だから，△JNK：△JFK＝KN：KF＝2：5　ところで，△JFKの面積はJFを底辺，KEを高さとして求められるから，$\frac{1}{2}\times2\times4=4$　$\triangle JNK=\frac{2}{5}\triangle JFK=\frac{8}{5}$

図1

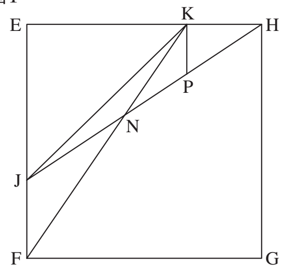
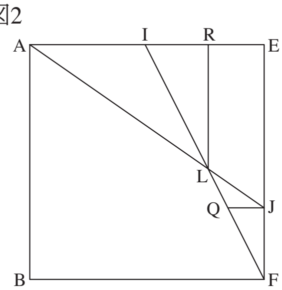


図2

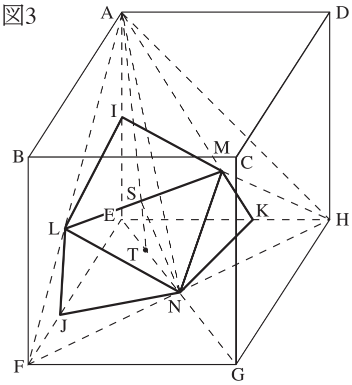


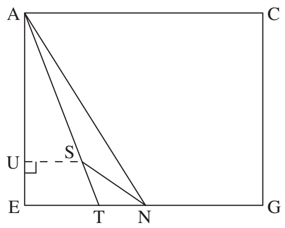
重要　(2)　図2のように，点JからEAに平行な直線を引いてFIとの交点をQとする。JQ：EI＝FJ：FE＝1：3　EI＝3なので，JQ＝1　また，AL：JL＝AI：JQ＝3：1だから，AL：AJ＝3：4　点LからAEに垂線LRを引くと，LR：JE＝AL：AJ＝3：4　JE＝4なので，LR＝3　点MからAEに垂線を引くと点Rに達して，同様にMR＝3　面ALIと面AMIは垂直に交わっているので，三角錐AILMの体積は，△AILを底面，MRを高さとして求められる。よって，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times3\right)\times$

$3=\frac{9}{2}$

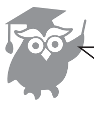
やや難 (3)　E，I，J，K，L，M，Nを頂点とする多面体は，四角形EJNKを底面，AEを高さとする四角錐から，三角錐AILMと三角錐ALNMを除いたものである。四角形EJNK＝△EJK＋△JNK＝$\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{8}{5}=\frac{48}{5}$　よって，四角錐AEJNKの体積は，$\frac{1}{3}\times\frac{48}{5}\times6=\frac{96}{5}$　三角錐ALNMの体積については，LMの中点をSとし，△ASNを底面とする合同な三角錐LASNと三角錐MASNの和として求められる。JK＝$4\sqrt{2}$であり，AL：AJ＝3：4だから，LM＝$3\sqrt{2}$　LS＝MS＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　図3で示すように，直線ASが面EFGHと交わる点をTとすると，点TはEG上にある。AEを3：1に分ける点をUとすると，△ULM，△SUL，△SUMは直角二等辺三角となるから，US＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　US：ET＝AS：AT＝AL：AJ＝3：4なので，ET＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{3}=2\sqrt{2}$　点NからEFに垂線NVを引くと，NV：KE＝FN：FK＝3：5　よって，NV＝$\frac{12}{5}$　△VNEは直角二等辺三角形だから，EN＝$\frac{12\sqrt{2}}{5}$　NT＝$\frac{12\sqrt{2}}{5}-2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$　△ASN＝△ANT－△SNT　点SからEGまでの距離はAEの$\frac{1}{4}$なので$\frac{3}{2}$　よって，△ASN＝$\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}\times6-\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{5}-\frac{3\sqrt{2}}{10}=\frac{9\sqrt{2}}{10}$　よって，三角錐ALNMの体積は，$\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{10}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times2=\frac{9}{5}$　したがって，E，I，J，K，L，M，Nを頂点とする多面体の体積は，$\frac{96}{5}-\frac{9}{2}-\frac{9}{5}=\frac{129}{10}$

図3





★ワンポイントアドバイス★



$\boxed{1}$の(1)は，垂直に交わる2直線の傾きの積は1であることを使う。(2)はともかく点Pのx座標を求める。$\boxed{2}$は，四角形A′B′C′D′をいろいろと書いてみること。$\boxed{3}$の(2)は，$abc=0$のときも整数となることを忘れずに。$\boxed{4}$の(3)は，(1)，(2)がヒント。