平 成 30 年 度

解　答　と　解　説

《平成30年度の配点は解答用紙に掲載してあります。》

＜数学解答＞ 《学校からの正答の発表はありません。》

〔問題1〕 (1) ① 32　(2) ② $\frac{2}{3}$　(3) ③ $2+\sqrt{2}$

〔問題2〕 (1) ④ 15日目　(2) ⑤ 9回　(3) ⑥ 619日目

〔問題3〕 (1) ⑦－1 4　⑦－2 3　(2) ⑧ $\frac{2\sqrt{39}}{13}$cm　(3) ⑨－1 39　⑨－2 40

〔問題4〕 (1) ⑩ 50秒　(2) ⑪ 362人　⑫－1 10分　⑫－2 0秒

〔問題5〕 (1) ⑬ $12\sqrt{2}$cm　⑭ $-2+2\sqrt{5}$秒　(2) ⑮ $8-4\sqrt{2}$秒

＜数学解説＞

〔問題1〕（小問群－式の値，平方根の計算，関数・グラフと確率，関数・グラフと図形，座標）

基本

(1)　$x+y=\sqrt{11}$，$x-y=\sqrt{3}$の両辺をそれぞれ2乗すると，$x^2+2xy+y^2=11$…①　$x^2-2xy+y^2=3$…②　①－②から，$4xy=8$　$xy=2$　よって，$x^5y^5=32$

(2)　大小2個のさいころの目の出方の総数は$6\times6=36$(通り)　3本の直線のうちの2本が平行であるときや重なるときに三角形はできない。傾きが等しい直線は平行だから，$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$のときに三角形はできない。両辺をab倍すると，$a^2=b^2$　a，bは正の数であるから，$a=b$　このとき，直線$y=\frac{b}{a}x$と直線$y=\frac{a}{b}x$は同じ直線となるので三角形はできない。$(a, b)=(1, 1)$，$(2, 2)$，…，$(6, 6)$…①　直線$y=\frac{b}{a}x$と直線$y=\frac{1}{2}x+1$が平行になるとき，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$　$(a, b)=(2, 1)$，$(4, 2)$，$(6, 3)$…②　直線$y=\frac{a}{b}x$と直線$y=\frac{1}{2}x+1$が平行になるとき，$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$　$(a, b)=(1, 2)$，$(2, 4)$，$(3, 6)$…③　直線$y=\frac{b}{a}x$と直線$y=\frac{a}{b}x$は原点以外では交わらず，また，$y=\frac{1}{2}x+1$は原点を通らないので，3直線が1点で交わることはない。…④　①～④のことから，三角形ができない場合が12通りあるので，3本の直線が三角形をつくる確率は，$\frac{36-12}{36}=\frac{2}{3}$

(3)　点Bのy座標は，$y=1^2=1$　点Aのx座標をmとするとy座標はm^2　点Cのx座標をnとすると，ACの中点Bの座標が(1，1)だから，$\frac{m+n}{2}=1$　$m+n=2$…①　$\frac{m^2+0}{2}=1$　$m^2=2$…②　①から$m=2-n$…③　③を②に代入して，$(2-n)^2=2$　$(2-n)^2=(n-2)^2$だから，$n-2=\pm\sqrt{2}$　$n=2\pm\sqrt{2}$　Cのx座標は1より大きいから，$2+\sqrt{2}$

〔問題2〕（その他の問題－規則性）

(1)　1円硬貨と5円硬貨がともに手持ちからなくなるときの金額は10の倍数である。n日目の金額をx円とすると，右図で示すように，$2x=(n+1)\times n$　$x=\frac{n(n+1)}{2}$　この値が10の倍数となるときを求めて

$$
\begin{array}{rl}
 & x=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n \\
-) & x=n+(n-1)+\cdots\cdots3+2+1 \\
\hline
 & 2x=(n+1)+(n+1)+\cdots\cdots+(n+1)
\end{array}
$$

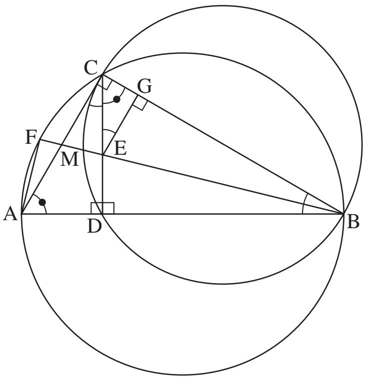
いけばよい。10＝2×5なので，$n(n+1)$が2×2×5を含む数のときに$\dfrac{n(n+1)}{2}$が10の倍数となる。$n=4$のとき，$n+1=5$　　よって，$\dfrac{n(n+1)}{2}=10$　　2回目は$n=15$のときで，$n+1=16$となるから，$\dfrac{n(n+1)}{2}=120$　　よって，15日目である。

やや難　(2)　nが4の倍数で1の位が4であるとき，$n+1$は5の倍数となる。そのような数は，4，4＋20，4＋20×2，…であり，50日目までに4日目，24日目，44日目の3回ある。nが5の倍数で$n+1$が4の倍数のときは，$n=15$，15＋20，15＋20×2，…であり，15日目，35日目の2回ある。nが10の倍数で$n+1$が2の倍数のときは，$n=10$，30，…のときには$n+1$が奇数となるので不適当であり，$n=20$，40，…のような20の倍数であればよい。$n+1$が20の倍数のときでもよい。そのとき，$n=19$，19＋20，19＋20×2，…　　以上のことから50日目までに，4日目，15日目，19日目，20日目，24日目，35日目，39日目，40日目，44日目の9回ある。

やや難　(3)　(4，15，19，20)，(4＋20，15＋20，19＋20，20＋20)，(4＋20×2，15＋20×2，19＋20×2，20＋20×2)，…と組にして考えると，123回目までには30組ある。123回目は，31組目の3番目の数だから，19＋20×(31－1)＝619　　619日目である。

〔問題3〕（平面図形ー円の性質，三平方の定理，相似，長さ，長さの比，面積の比）

(1)　直径に対する円周角は90°なので△ABCは直角三角形であり，AB：AC＝2：1なので，3辺の比が2：1：$\sqrt{3}$，内角の大きさが30°，60°，90°の直角三角形である。よって，BC＝$2\sqrt{3}$ cm　　∠BDCは直径BCに対する円周角なので，∠BDC＝90°＝∠ADCであり，△ACD∽△ABCとなる。よって，AC：AD：CD＝2：1：$\sqrt{3}$　　AD＝1cm，CD＝$\sqrt{3}$ cm，BD＝3cmとなる。また，点MはACの中点だから，AM＝CM＝1cm　　点EからBCに垂線EGを引くと，△ECG∽△BACとなるので，CE＝$2a$とすると，CG＝a，BG＝$2\sqrt{3}-a$，EG＝$\sqrt{3}a$　　EG//MCなので，EG：MC＝BG：BC



$\sqrt{3}a:1=(2\sqrt{3}-a):2\sqrt{3}$　　$6a=2\sqrt{3}-a$　　$7a=2\sqrt{3}$　　$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$　　よって，CE＝$2a=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$　　ED＝$\sqrt{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{3\sqrt{3}}{7}$　　したがって，CE：ED＝4：3

(2)　∠AFBは直径ABに対する円周角なので90°である。よって，△AFB∽△EDB　　よって，AF：ED＝AB：EB　　EBについては△EBDで三平方の定理を用いると，$EB^2=ED^2+BD^2=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2+3^2=\dfrac{27}{49}+9=\dfrac{9}{49}\times(3+49)=\dfrac{9}{49}\times52=\dfrac{36}{49}\times13$　　EB＝$\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$　　よって，AF：$\dfrac{3\sqrt{3}}{7}=4:\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$

AF＝$\dfrac{12\sqrt{3}}{7}\div\dfrac{6\sqrt{13}}{7}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$ (cm)

(3)　BF：BD＝AB：EBだから，BF：3＝4：$\dfrac{6\sqrt{13}}{7}$　　BF＝$12\div\dfrac{6\sqrt{13}}{7}=\dfrac{14}{\sqrt{13}}=\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$　　よって，EF＝$\dfrac{14\sqrt{13}}{13}-\dfrac{6\sqrt{13}}{7}=\dfrac{20\sqrt{13}}{91}$　　△ABFの面積をSとすると，BE：BF＝$\dfrac{6\sqrt{13}}{7}:\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$＝78：98＝39：49だから，△ABE＝$\dfrac{39}{49}$S　　AD：AB＝1：4だから，△ADE＝$\dfrac{1}{4}$△ABE＝$\dfrac{39}{196}$S　　EF：BF＝$\dfrac{20\sqrt{13}}{91}:\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$＝20：98＝10：49なので，△AFE＝$\dfrac{10}{49}$S　　したがって，△ADE：△AFE＝