平成29年度

解答と解説

《平成29年度の配点は解答用紙に掲載してあります。》

＜数学解答＞《学校からの正答の発表はありません。》

$\boxed{1}$ （1）① $b=3-\sqrt{5}$　② 0　（2） 3：4：3　（3）① 3：1　② $\frac{1}{27}$倍

$\boxed{2}$ （1） 300　（2） 546　$\boxed{3}$ （1） $\frac{3\sqrt{5}}{10}-\frac{1}{2}$　（2） $\frac{1}{5}$　（3） $\frac{5}{24}$

$\boxed{4}$ （1） 13個　（2） 19個　（3） $k=202$　$\boxed{5}$ （1） $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　（2） $\sqrt{10}$

＜数学解説＞

$\boxed{1}$ （数の性質，式の値，図形と関数，空間図形）

基本 （1）① $2<\sqrt{5}<3$より，$-3<-\sqrt{5}<-2$　$2<5-\sqrt{5}<3$　よって，$a=2$　$b=5-\sqrt{5}-2=3-\sqrt{5}$

② $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-2}=\frac{1}{2-(3-\sqrt{5})}+\frac{1}{3-\sqrt{5}-2}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}=0$

（2） 4点A，B，C，Dは$y=x^2$上の点だから，A(1，1)，B(2，4)，C(3，9)，D(4，16)　4点A，B，C，Dからx軸にひいた垂線をそれぞれAE，BF，CG，DHとする。△OAD＝△ODH－△OAE－台形AEHD＝$\frac{1}{2}\times4\times16-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times(1+16)\times(4-1)=6$　△OBD＝△ODH－△OBF－台形BFHD＝$\frac{1}{2}\times4\times16-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times(4+16)\times(4-2)=8$　△OCD＝△ODH－△OCG－台形CGHD＝$\frac{1}{2}\times4\times16-\frac{1}{2}\times3\times9-\frac{1}{2}\times(9+16)\times(4-3)=6$　よって，△OAD：△OBD：△OCD＝6：8：6＝3：4：3

重要 （3）① OPは三角錐OBCDの高さに等しい。正四面体ABCD＝三角錐OABC＋三角錐OBCD＋三角錐OCDA＋三角錐ODAB＝4×三角錐OBCD　ここで，正四面体ABCD＝$\frac{1}{3}$×△BCD×AP，三角錐OBCD＝$\frac{1}{3}$×△BCD×OPだから，AP＝4OP　よって，AO：OP＝(4－1)：1＝3：1

重要 ② 線分CDの中点をMとする。点Pは正三角形BCDの重心であるから，BP：PM＝2：1　同様に，AQ：QM＝2：1　よって，PQ//BA，PQ＝$\frac{1}{3}$BAとなる。同様に，PQ＝QR＝RS＝SPだから，四面体PQRSは正四面体で，もとの正四面体との相似比は1：3　したがって，体積比は$1^3：3^3=1：27$となり，$\frac{1}{27}$倍

$\boxed{2}$ （数の性質）

（1） $a^3-a=a(a^2-1)=(a-1)\times a\times(a+1)$より，$a^3-a$は連続する3つの整数の積に等しい。$100=2^2\times5^2$より，題意を満たす連続する3つの整数の組は，(23，$\underline{24}$，25)，(24，$\underline{25}$，26)，(48，$\underline{49}$，50)，(50，$\underline{51}$，52)，(74，$\underline{75}$，76)，(75，$\underline{76}$，77)の6つある。よって，求める値は，24＋25＋49＋51＋75＋76＝300

(2)　91＝7×13より，題意を満たす連続する3つの整数の組は，(12，<u>13</u>，14)，(13，<u>14</u>，15)，(26，<u>27</u>，28)，(63，<u>64</u>，65)，(76，<u>77</u>，78)，(77，<u>78</u>，79)，(89，<u>90</u>，91)，(90，<u>91</u>，92)，(91，<u>92</u>，93)の8つある。よって，求める値は，13＋14＋27＋64＋77＋78＋90＋91＋92＝546

3　（平面図形の計量）

重要　(1)　$O'E = O'Q = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2}$　$O'A = \sqrt{AE^2 + O'E^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$　BCは直径だから，$\angle BPC = 90°$　$\triangle BPA$と$\triangle AEO'$において，$\angle APB = \angle O'EA = 90°$　$\angle ABP = 90° - \angle BAP = \angle O'AE$　2組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle BPA \backsim \triangle AEO'$　$AP : O'E = AB : O'A$　$AP = \frac{1}{2} \times 1 \div \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$　よって，$PQ = O'A - AP - O'Q = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}$

重要　(2)　PからBOにひいた垂線をPFとする。$\triangle ERO$と$\triangle OFP$において，OEは直径だから，$\angle ORE = 90°$　よって，$\angle ORE = \angle PFO = 90°$…①　半円Oの半径だから，$OE = PO = 1$…②　EO//PFより，平行線の錯角だから，$\angle EOR = \angle OPF$…③　①，②，③より，直角三角形の斜辺と1鋭角がそれぞれ等しいので，$\triangle ERO \equiv \triangle OFP$　よって，$OR = PF$　ここで，平行線と比の定理より，$PF : AB = CP : CA = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \times 2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2} \times 2 = 4 : 5$　したがって，$PF = \frac{4}{5}AB = \frac{4}{5}$　よって，$PR = OP - OR = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

重要　(3)　PFと$O'S$との交点をTとする。平行線と比の定理より，$PT : O'O = PR : RO = \frac{1}{5} : \frac{4}{5} = 1 : 4$　よって，$PT = \frac{1}{4}$　$O'O = \frac{1}{8}$　$PT : AS = O'P : O'A = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) : \frac{\sqrt{5}}{2} = 3 : 5$　したがって，$AS = \frac{5}{3}PT = \frac{5}{24}$

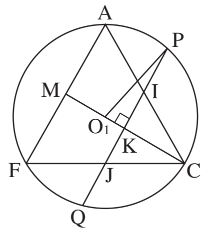
4　（格子点）

基本　(1)　$y=x^2$と$y=5$からyを消去して，$x^2=5$　$x \geqq 0$より，$x=\sqrt{5}$　$2<\sqrt{5}<3$より，格子点は，(0，0)，(0，1)，…，(0，5)，(1，1)，(1，2)，…，(1，5)，(2，4)，(2，5)の6＋5＋2＝13(個)

(2)　題意を満たすとき，$y=k$上の格子点は，$(0,\ k)$，$(1,\ k)$，…，$(9,\ k)$の10個である。点$(9,\ k)$が$y=x^2$上にあるとき，$k=9^2=81$　点$(10,\ k)$が$y=x^2$上にあるとき，$k=10^2=100$　よって，求めるkは$k=81$から100－1＝99までの99－80＝19(個)

(3)　$k=m^2$のとき，$y=k$上の格子点は$m+1$個あり，$k=(m+1)^2$のとき，$y=k$上の格子点は$m+2$個あるから，直線$y=m^2$，直線$y=(m+1)^2-1$，放物線$y=x^2$，およびy軸で囲まれた図形の周上および内部にある格子点の数は$(m+1)(2m+1)$個となる。$m=0$，1，2，3，…，13をそれぞれ代入して，和を求めると，1＋2×3＋3×5＋4×7＋5×9＋6×11＋7×13＋8×15＋9×17＋10×19＋11×21＋12×23＋13×25＋14×27＝1＋6＋15＋28＋45＋66＋91＋120＋153＋190＋231＋276＋325＋378＝1925　$14^2=196$より，$y=196$上の格子点は15個となるから，(2017－1925)÷15＝6余り2より，$y=202$のとき，領域Dの格子点の数は1925＋15×7＝2030となる。よって，最小のkの値は202

5　（空間図形の計量）



重要　(1)　$\triangle AFC$は1辺の長さが$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$の正三角形で，O_1は$\triangle AFC$の重心だから，線分AFの中点をMとすると，$CO_1 = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$　よって，円O_1の半径は$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

重要　(2)　$\triangle AFC$と$\triangle BGD$は線分ACの中点Iと線分FCの中点Jとを結ぶ線分IJを共